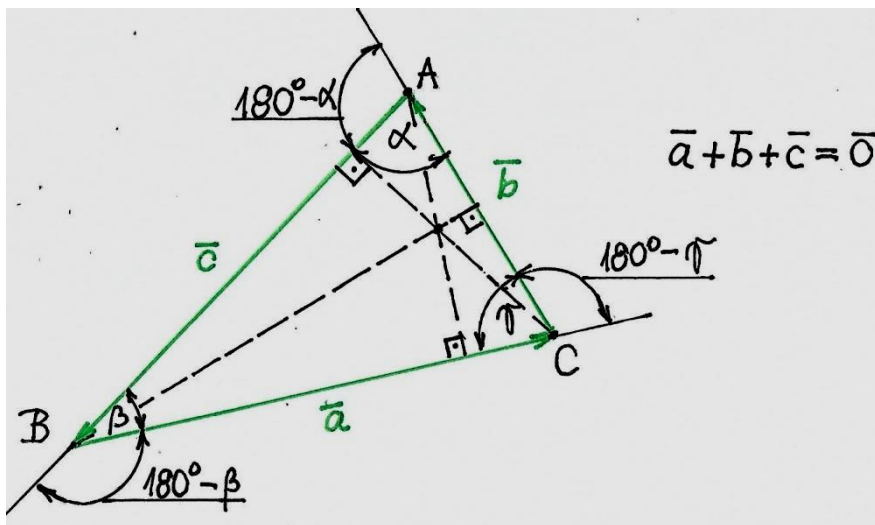


Egy sajátos egyenletről

Egy korábbi dolgozatunkban – melynek címe: *Három erő egyensúlyához* – már foglalkoztunk az

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0} \quad (1)$$

vektoregyenlettel. Megbeszéltük – egyebek mellett –, hogy (1) a feltétele az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ síkbeli erővektorok egyensúlyának is. Most inkább egy újabb geometriai kirándulást teszünk vele. Ehhez tekintsük az 1. ábrát!



1. ábra

1. Szorozzuk végig (1) - et skalárisan $\mathbf{a}$ - val! Ekkor:

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{a}^2 + \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{0}, \text{ innen:}$$

$$a^2 + a \cdot b \cdot \cos(180^\circ - \gamma) + a \cdot c \cdot \cos(180^\circ - \beta) = 0; \text{ egyszerűsítve:}$$

$$a - b \cdot \cos \gamma - c \cdot \cos \beta = 0 \rightarrow a = b \cdot \cos \gamma + c \cdot \cos \beta \rightarrow a < b + c, \text{ tehát:}$$

$$a < b + c; \quad (2/1)$$

hasonlóképpen eljárva – $\mathbf{b}$ - vel majd $\mathbf{c}$ - vel szorozva (1) - et skalárisan – :

$$b < c + a, \quad (2/2)$$

$$c < a + b. \quad (2/3)$$

A (2) képletek a *háromszög - egyenlőtlenséget* fejezik ki.

2. Szorozzuk végig (1) - et vektoriálisan $\mathbf{a}$ - val! Ekkor:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{0} = \mathbf{0}; \text{ innen:}$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{a} + \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c} = \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{c} \times \mathbf{a}. \quad (3/1)$$

Hasonlóan eljárva – pl. $\mathbf{b}$ - vel szorozva vektoriálisan –, majd (3 / 1) - et is felhasználva:
 $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{c} \times \mathbf{a} .$ (3 / 2)

Azonban (3 / 2) az $\mathbf{ABC}$ háromszög kétszeres területvektora, így:

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{b} \times \mathbf{c}| = |\mathbf{c} \times \mathbf{a}| = 2 \cdot T , \text{ vagy}$$

$$T = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin(180^\circ - \gamma) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \gamma , \quad (4 / 1)$$

$$T = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin(180^\circ - \alpha) = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin \alpha , \quad (4 / 1)$$

$$T = \frac{1}{2} \cdot c \cdot a \cdot \sin(180^\circ - \beta) = \frac{1}{2} \cdot c \cdot a \cdot \sin \beta ; \quad (4 / 1)$$

(4) -ből:

$$a \cdot b \cdot \sin \gamma = b \cdot c \cdot \sin \alpha = c \cdot a \cdot \sin \beta , \text{ innen:}$$

$$\frac{a}{c} = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} , \frac{b}{c} = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} , \frac{b}{a} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \rightarrow \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} . \quad (5)$$

Az (5) egyenletek a *szinusztételt* írják le.

3. Átrendezzük (1) - et:

$$\mathbf{a} = -(\mathbf{b} + \mathbf{c}) ; \quad (1^*)$$

(1*) négyzetre emelésével:

$$\mathbf{a}^2 = (\mathbf{b} + \mathbf{c})^2 = \mathbf{b}^2 + 2 \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{c}^2 \rightarrow a^2 = b^2 + 2 \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} + c^2 \rightarrow$$

$$a^2 = b^2 + 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(180^\circ - \alpha) + c^2 \rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha , \text{ tehát:}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha ; \quad (6 / 1)$$

hasonlóképpen eljárva – (1*) két másik átrendezését is alkalmazva – :

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2 \cdot c \cdot a \cdot \cos \beta , \quad (6 / 2)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \gamma . \quad (6 / 3)$$

A (6) egyenletek a *koszinusztételt* írják le.

Megjegyzések:

M1. Az 1. ábrán bejelöltük az $\mathbf{ABC}$ háromszög magasságvonalait is, melyek úgy osztják az oldalakat két részre, ahogyan azt a (2) - re vezető egyenletek leírják:

$$a = b \cdot \cos \gamma + c \cdot \cos \beta , \quad b = c \cdot \cos \alpha + a \cdot \cos \gamma , \quad c = a \cdot \cos \beta + b \cdot \cos \alpha . \quad (2^*)$$

Javasoljuk, hogy az érdeklődő Olvasó vegye végig (*) érvényességének belátását hegyesszögű, derékszögű és tompaszögű háromszögre is!

M2. Most (3 / 2) - vel:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{c} \times \mathbf{a} \equiv \mathbf{n}, \quad (7)$$

a három vektor síkjának normálvektora; így fennáll, hogy:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{c} \cdot \mathbf{n} = 0; \quad (8)$$

majd (7) és (8) szerint:

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = 0, \quad (9/1)$$

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0, \quad (9/2)$$

melyek a vektoriális szorzat, illetve három vektor vegyes szorzatának néhány tulajdonságát is mutatják.

M3. Az [1] és [2] munkákban további adalékokra lelhetünk az (1) egyenlethez.

Ajánlott irodalom:

[1] – **Reiman István:** Matematika
Typotex Kiadó, Budapest, 2011.

[2] – **Obádovics J. Gyula:** Matematika
15. kiadás, Scolar Kiadó, Budapest, 1998.

Összeállította: **Galgóczi Gyula**
ny. mérnöktanár

Sződliget, 2020. 05. 13.